حسین کریمی
دبیر ریاضی از تهران

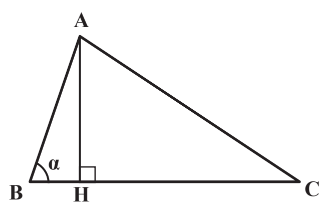
بحثی در باب مساحت چهارضلعی‌های محدب

اشاره

در فصل دوم کتاب هندسه ۱، با روش محاسبهٔ مساحت مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و ذوزنقه آشنا شدیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: «آیا می‌توانیم برای به‌دست آوردن مساحت همهٔ چهارضلعی‌های محدب، روش ثابتی معرفی کنیم؟» جواب این سؤال مثبت است و چنین امکانی وجود دارد که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و مساحت آن را به‌دست می‌آوریم:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲} BC \times AH \qquad \text{(الف)}$$



شکل ۱

در مثلث قائم‌الزاویه ABH، داریم:

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB.\sin\alpha \qquad \text{(ب)}$$

اکنون با جایگذاری (ب) در (الف) داریم:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲} BC.AB.\sin\alpha$$

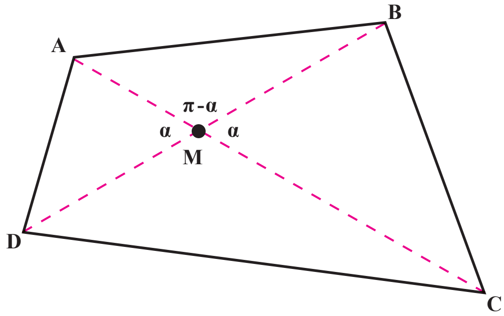
یعنی مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

● **مثال:** در مثلث ABC داریم: $AB = ۳\sqrt{۲}$ ، $AC = ۸$ و $\hat{A} = ۴۵^\circ$ مساحت مثلث را به‌دست آورید.

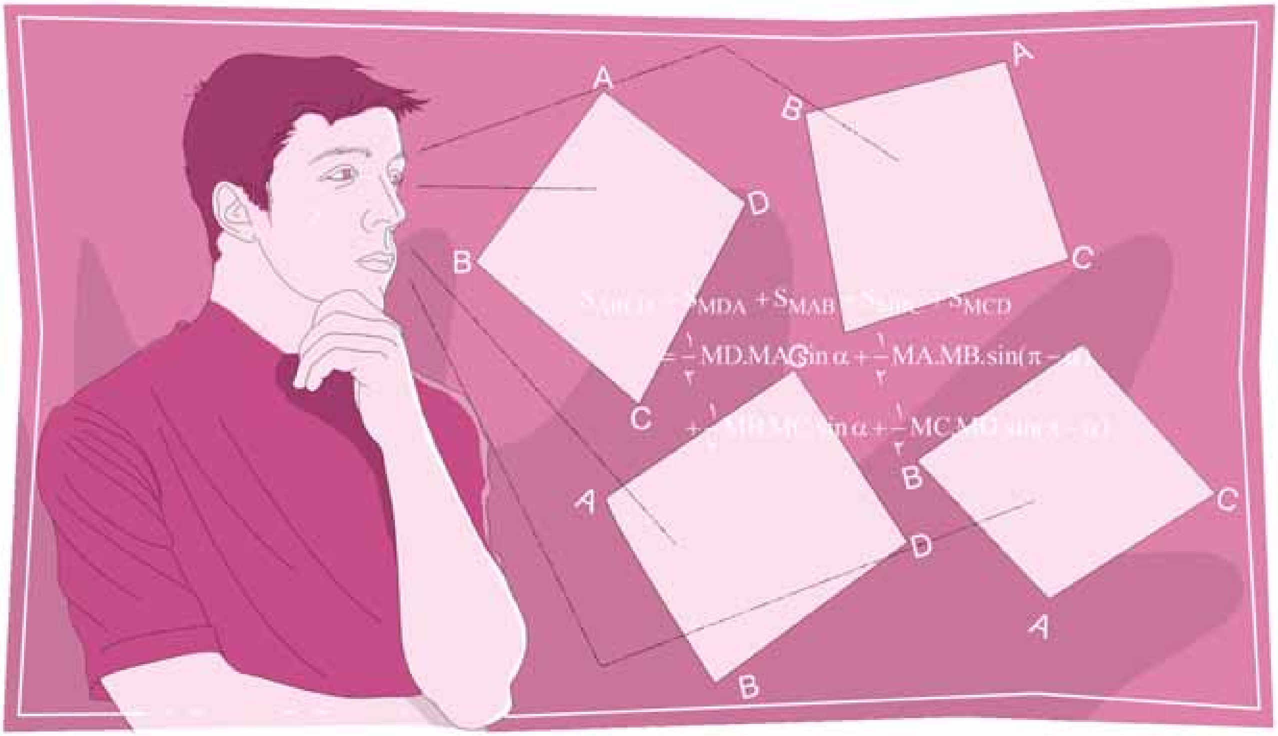
◆ **حل:** توجه داریم که اندازهٔ زاویهٔ بین دو ضلع AB و AC داده شده است. پس داریم:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times ۸ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲$$

با توجه به مقدمهٔ فوق، حال به سراغ چهارضلعی محدب ABCD می‌رویم که دو قطر آن، یکدیگر را در نقطهٔ M و به زاویهٔ α قطع کرده‌اند.



شکل ۲



$$S_{ABCD} = S_{MDA} + S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCD}$$
$$= \frac{۱}{۲} MD.MA.\sin\alpha + \frac{۱}{۲} MA.MB.\sin(\pi-\alpha)$$
$$+ \frac{۱}{۲} MB.MC.\sin\alpha + \frac{۱}{۲} MC.MD.\sin(\pi-\alpha)$$

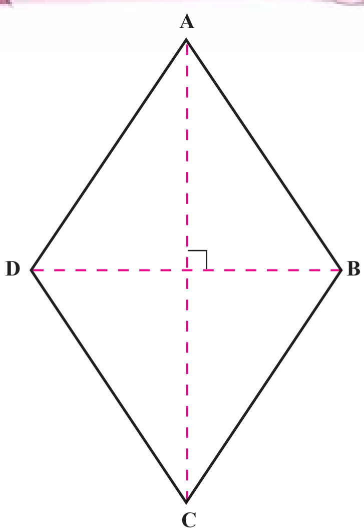
توجه داریم که سینوس هر زاویه با سینوس مکمل آن زاویه برابر است؛ یعنی: $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}\sin\alpha(MD.MA + MA.MB + MB.MC + MC.MD)$$
$$= \frac{۱}{۲}\sin\alpha\left[MA(MD+MB) + MC(MB+MD)\right]$$
$$= \frac{۱}{۲}\sin\alpha(MA.BD + MC.BD)$$
$$= \frac{۱}{۲}\sin\alpha.BD(MA+MC)$$
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC.BD.\sin\alpha$$

نتیجه: مســـاحت هر چهارضلعی محدب برابر است: با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر.

مسئلهٔ ۱. مساحت لوزی را به‌دست آورید.

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD \times \sin ۹۰^\circ$$



شکل ۳

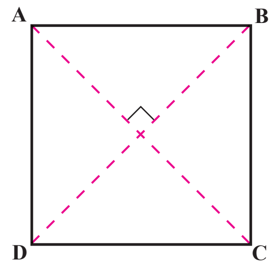
با توجه به اینکه: $\sin ۹۰^\circ = ۱$، داریم:

$$S_{\lozenge} = \frac{۱}{۲} AC \times BD$$

نکتهٔ مهم: مســـاحت هر چهارضلعی که دو قطر آن برهم عمود باشـــند، برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطر.

مسئلهٔ ۲. مساحت مربع را به‌دست آورید.

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times \sin ۹۰^\circ=\frac{۱}{۲}(AC)^۲=\frac{۱}{۲}(BD)^۲$$



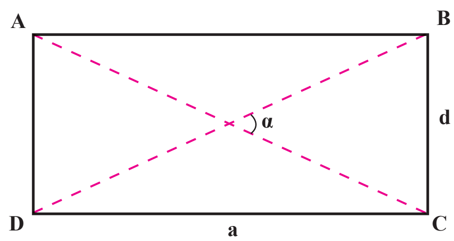
شکل ۴

نتیجه: مساحت هر مربع برابر است: با نصف مجذور اندازهٔ قطر آن.

● **مثال:** مساحت مربعی را که اندازهٔ قطر آن $۲\sqrt{۳}$ است، به‌دست آورید.

$$S_{\square}=\frac{۱}{۲}(\text{اندازهٔ قطر})^۲=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳})^۲=\frac{۱}{۲}\times ۱۲=۶$$

مسئلهٔ ۳. در یک مستطیل به ابعاد a و b، سینوس زاویهٔ بین دو قطر را به‌دست آورید.



شکل ۵

$$\Delta ABC: AC^۲=a^۲+b^۲ \Rightarrow AC=BD=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

$$\begin{cases} S_{\square}=a.b \\ S_{\square}=\frac{۱}{۲}AC.BD.\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow a.b=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲}\times\sqrt{a^۲+b^۲}.\sin\alpha$$

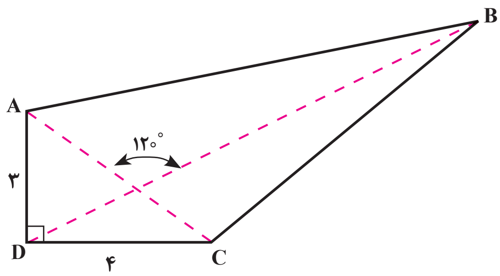
$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۲a.b}{a^۲+b^۲}$$

● **مثال:** در یک مستطیل به اضلاع ۱ و $۲+\sqrt{۳}$، اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر را به‌دست آورید.

$$\sin\alpha=\frac{۲a.b}{a^۲+b^۲}=\frac{۲\times(۲+\sqrt{۳})\times ۱}{(۷+۴\sqrt{۳})+۱}=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۸+۴\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

مسئلهٔ ۴. در چهارضلعی ABCD داریم: $BD=۸\sqrt{۳}$، CD=۴، AD=۳ و $\hat{D}=۹۰^\circ$. اندازهٔ زاویه بین دو قطر نیز ۱۲۰° است. مساحت چهارضلعی را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث ABC را مشخص کنید.



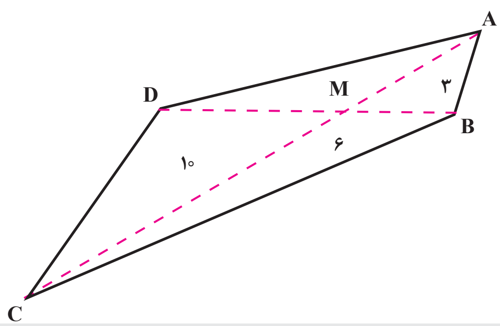
شکل۶

$$\Delta ACD: AC^۲=۳^۲+۴^۲ \Rightarrow AC=۵$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۸\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳۰$$

$$S_{ABC}=S_{ABCD}-S_{ACD}=۳۰-\frac{۳\times ۴}{۲}=۳۰-۶=۲۴$$

مسئلهٔ ۵. در چهارضلعی ABCD، داریم: AC=۱۲، BD=۸، $S_{\Delta BCM}=۶$، $S_{\Delta ABM}=۳$ و $S_{\Delta CDM}=۱۰$ مطلوب است تعیین اندازهٔ زاویهٔ M.



شکل۷

$$\frac{S_{CMD}}{S_{CMB}}=\frac{DM}{MB}\Rightarrow\frac{DM}{MB}=\frac{۱۰}{۶}$$

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABM}}=\frac{DM}{MB}\Rightarrow\frac{S_{ADM}}{۳}=\frac{۱۰}{۶}\Rightarrow S_{ADM}=۵$$

$$S_{ABCD}=۳+۶+۱۰+۵=۲۴$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD\times\sin\hat{M}$$

$$\Rightarrow ۲۴=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۸\times\sin\hat{M}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{M}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{M}=۳۰^\circ$$